Úloha č. 2 - Difrakce a difraktivní struktury

1 Úvod

Tato úloha navazuje na úlohu č. 2 Difrakce světelného záření Základního praktika z optiky a optoelektroniky. Úkolem difrakční úlohy je zjistit stav vlnového pole v libovolném bodě za překážkou. V předcházející úloze se difrakce uvažovala z hlediska místa pozorování. Prostor byl rozdělen na tzv. pozorovací zóny, ve kterých se používají určité aproximace, aby bylo možné proces difrakce řešit. V blízké zóně se používá tzv. Fresnelovo přiblížení, které klade podmínku na velikost objektu vzhledem k vlnové délce světla. Ve vzdálené zóně (tzv. Fraunhoferově zóně) pak kromě již zmíněné podmínky platí omezení na velikost objektu vzhledem ke vzdálenosti k místu pozorování (splnění podmínky se posuzuje tzv. Fresnelovým číslem N_F, pro něž v přiblížení vzdáleného pole platí $N_F < 1/2$). Difrakční obrazec ve vzdálené zóně svůj chrakter již nemění, mění se pouze jeho měřítko.

Jinou možností řešení difrakční úlohy je přístup fourierovské optiky. Jedná se o skalární integrální metodu, která pracuje se systémem rovinných vln šířících se volným prostorem. Výsledné pole je pak úměrné Fourierově transformaci pole těsně za transparentem. Budeme-li na popsanou úlohu nahlížet z jiného směru, tak difrakce nám vlastně dává možnost realizovat opticky Fourierovu transformaci objektu, na kterém dochází k difrakci. Z těchto uvedených důvodů má Fourierova transformace zásadní význam v teorii difrakce a používá se pro analýzu struktur nejen v optické oblasti, ale i v oblasti rentgenového nebo neutronového záření.

Optická Fourierova transformace

Mějme dvourozměrnou funkci $t(x, y)$ v praxi realizovanou tenkým transparentem umístěným v počátku osy z. Prochází-li rovinná vlna s jednotkovou amplitudou tímto transparentem, dochází na něm k difrakci a prošlá vlna je součtem rovinných vln rozptýlených do různých směrů, které odpovídají prostorovým frekvencím funkce transparentu. Funkci tenkého transparentu zapsanou jako superpozici harmonických funkcí lze matematicky vyjádřit jako Fourierovu transformaci

$$t(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(\xi\eta), \exp\left[-i2\pi(\xi x + \eta y)\right] d\xi d\eta, \tag{1}$$

kde ξ, η jsou prostorové frekvence harmonických funkcí, které dále souvisí s úhly šíření rovinných vln a vlnou délkou světla vztahy $\sin\Theta_x = \lambda\xi$ a $\sin\Theta_y = \lambda\eta$. Projde-li rovinná vlna s jednotkovou amlitudou tímto tenkých transparentem, je jím modulována a je vyjádřena jako superpozice rovinných vln s prostorovými frekvencemi stejnými s transparentem

$$a(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(\xi\eta), \exp\left[-i2\pi(\xi x + \eta y)\right] \exp(-ik_z z) d\xi d\eta \tag{2}$$

s komplexními obálkami $\mathcal{T}(\xi, \eta)$, kde $k_z = 2\pi(1/\lambda^2 - \xi^2 - \eta^2)^{1/2}$. Rovinné vlny šířící se od transparentu volným prostorem se navzájem překrývají (mají nekonečnou rozlohu) a je nutné najít způsob oddělení těchto vln, abychom mohli získat spektrum prostorových frekvencí transparentu. V dostatečně velké vzdálenosti platí, že v každém bodě ve výstupní rovině přispívá pouze jediná rovinná vlna, takže jednotlivé komponenty se nakonec separují přirozeným způsobem. Praktičtější způsob spočívá v použití spojné čočky, která sfokuzuje každou rovinnou vlnu do jiného bodu v konečnu.

Fourierova transformace v dalekém poli

Pokud je vzdálenost šíření d dostatečně dlouhá, je příspěvek difrakčního pole v bodě (x, y) výstupní roviny jediná rovinná vlna se směrem určeným úhly $\Theta_x \approx x/d$ a $\Theta_y \approx y/d$ vzhledem k optické ose. Výsledné pole je pak možné psát jako

$$a(x, y, d) \approx \frac{i}{\lambda d} \exp\left[-i\frac{k}{d}(x^2 + y^2\right] \mathcal{T}\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right), \tag{3}$$

kde $\mathcal{T}(\xi, \eta)$ je Fourierova transformace transparentu a v rovnici byla provedena provedena paraxiální substituce prostorových frekvencí

$$\xi = \frac{x}{\lambda d},\ \eta = \frac{y}{\lambda d}. \tag{4}$$

Toto tvrzení platí pouze za předpokladu Fraunhoferova přiblížení. To znamená, že při odvození musí být provedena paraxiální aproximace a velikost objektu musí být malá vzhledem ke vzdálenosti výstupní roviny (Fresnelovo číslo $N_F < 1/2$). Pak je ze vztahu (3) vidět, že pole ve vzdálené zóně je až na fázový člen úměrné Fourierově transformaci pole těsně za stínítkem.

Realizace Fourierovy transformace čočkou

Rovinné vlny (komponenty vzniklé při difrakci na transparentu) které utvářejí vlnu, mohou být separovány také pomocí čočky. Tenká sférická spojka transformuje rovinou vlnu na paraboloidní vlnu (tzv. kvadratický fázový korektor) sfokuzovanou do bodu v ohniskové rovině čočky. Při získávání Fourierovy transformace v konečnu musí kvadratický fázový člen čočky vždy eliminovat kvadratický difrakční člen se stejným poloměrem kulové vlny. Stejný poloměr je zajištěn tím, že je pole registrováno v místě konvergence kulové vlny.

Jak již bylo poznamenáno, tak v případě systému, kdy je použita kolimovaná vlny, se fourierovská rovina nachází v ohniskové rovině čočky a difrakční vzdálenost odpovídá poloměru konvergentní vlny.

V případě, kdy nasvětlíme systém divergentní kulovou vlnou jejíž bodový zdroj se nachází na optické ose před čočkou v předmětovém prostoru ve vzdálenosti delší než ohnisko (proto aby vlna za čočkou konvergovala), pak bude místo bodu konvergence vlny ležet v místě obrazu bodového zdroje a v tomto místě se bude též nacházet fourierovská rovina. Hledané pole v případě transparentu v kontaktu s čočkou bude mít tvar

$$a_F(x, y) = \frac{ia_1}{\lambda d} \exp\left[-i\frac{k}{2d}(x^2 + y^2)\right] \mathcal{T}(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}), \tag{5}$$

kde d je vzdálenost mezi transparentem a místem konvergence kulové vlny.

Čočkou tedy dokážeme realizovat Fourierovu transformaci v konečnu a uplatňuje se při tom pouze Fresnelova aproximace. Bez čočky lze Fourierovu transformaci získat jen ve Fraunhoferově aproximaci, která vyžaduje splnění přísnějších podmínek (omezenost objektu).

Fourierovská difrakce

V úloze Základního praktika byla studována difrakce na jednoduchých omezených geometrických útvarech jak v blízké tak zejména ve vzdálené zóně, kde difrakční pole je úměrné Fourierově transformaci pole těsně za transparentem. Z vlastností Fourierovy transformace plynou pro difrakci některé další zajímavé vlastnosti.

Difrakce na hranách mnohoúhelníka

Pro difrakci na hranách mnohoúhelníka má praktický význam Abbeova věta: Difrakční obrazec apertury obsahující přímkový úsek má ve vzdáleném poli vždy světelný pruh ve směru kolmém na tento přímkový úsek. Pomocí této věty lze snadno určit počet přímkových úseků v objektu, přičemž nezáleží na délce těchto úseků.

Středová symetrie intenzitního difrakčního obrazce

Pomocí tzv. Fridelovy věty lze ukázat, že kvadrát modulu Fourierovy transformace je středově symetrická funkce. Optická intenzita světla, kterou jsme schopni detekovat, je úměrná kvadrátu modulu pole. Pokud toto pole je úměrné tvaru Fourierovy transformace pole těsně za stínítkem tak platí, že i zcela nesymetrická funkce ve vstupní rovině stínítka se v intenzitním obrazci ve výstupní rovině zesymetričtí. (Nápadné je to zejména u objektů bez středové symetrie, kde ke každému prvku, který tvoří objekt, vzniká komplexně sdružený obraz.)

Difrakční obrazec opakujícího se motivu

Fourierova transformace opakujících se motivů (vzájemně posunutých) dává stejnou amplitudu, ale různé fázové příspěvky. V případě periodického uspořádání opakujících se motivů dochází ke konstruktivnímu nebo destruktivnímu načítání příspěvků, což vede v určitých místech ke vzniku difrakčních maxim. Tuto zákonitost lze uplatnit i opačně: Jestliže difrakční obrazec soboru opakujícíh se elementárních útvarů je hladký a má tvar elementárního útvaru, jsou jednotlivé útvary v souboru stejné a jsou rozmístěny zcela náhodně.

2 Zadání úlohy

Cíle

Realizace Fourierovy transformace pomocí čočky a vyhodnocování fourierovské difrakce na různých objektech. Použití optického modulátoru jako amplitudového transparentu řízeného počítačem pro vytváření difraktivních struktur.

Pomůcky

Zdroj záření (He-Ne laser, $\lambda = 632,8\,\mathrm{nm}$), spojná čočka, prostorový filtr, difrakční objekty, optický modulátor řízený počítačem, $\lambda/2$ destička, měřítko, stínítko, držáčky, stojánky, pomocná optika a optická lavice.

Postup měření

1. Sestavte optické schéma pro realizaci Fourierovy transformace v konečnu pomocí divergentní vlny a spojné čočky tak, aby se fourierovská rovina nacházela na stínítku ve vhodné vzdálenosti. Divergentní kulovou vlnu vytvořte pomocí prostorového filtru.

2. Vyjasněte si měřítko vzhledem k poloze transparentu a uvědomte si možná omezení, které jednotlivé polohy mohou způsobovat (apertury přenosového systému omezují rozsah přenášených prostorových frekvencí).

3. Určete měřítko transformace (poloha prostorové frekvence na stínítku vzhledem ke vzdálenosti od objektu). Proveďte výpočet šířky jednoduchého obrazce (štěrbiny) z rozložení prostorových frekvencí na stínítku.

4. Pozorujte difrakční pole různých objektů (mnohoúhelník, hvězda, objekty středově nesymetrické, objekty s opakujícími se motivy) a ukažte souvislost s vlastnostmi Fourierovy transformace.

5. Určete periodu pixelů optického modulátoru.

6. Sestavte optické schéma s počítačem řízeným optickým modulátorem jako transparentem. Polarizaci světla nastavte pomocí $\lambda/2$ destičky tak, aby při černé barvě neprocházelo modulátorem světlo.

7. Pomocí poskytnutého programu si navrhněte objekty (černobílé dvouúrovňové obrázky v rozlišení 800x600 pixelů), na kterých budete demonstrovat optickou Fourierovu transformaci. Obrázky zobrazte na modulátor a pozorujte fourierovskou difrakci.

3 Požadované výsledky

1. Nakreslete a popište použité schéma pro realizaci optické Fourierovské transformace.
2. Uveďte vámi zvolené měřítko transformace a výpočet šířky štěrbiny z rozložení prostorových frekvencí na stínítku.
3. Určete velikost periody pixelů optického modulátoru v obou směrech.
4. Vysvětlete rozdíly ve spektrech stejných difrakčních objektů vytvořených klasicky jako otvor ve stínítku a pomocí optického modulátoru.

Reference

- Úloha č. 2 - Difrakce světelného záření, návod k Základnímu praktiku z optiky a optoelektroniky.
- P. Fiala, I. Richter, Fourierovská optika a optické zpracování signálů, skriptum, ČVUT, 2004.
- B. E. A. Saleh, M. C. Teich, Základy fotoniky (1. díl), Matfyzpress, 1994.